



ЗА ГАУС КАКО ГЕОДЕТ

Абстракт

За Карл Фридрих Гаус и неговиот допринос за математиката е пишувано многу. Во оваа статија ќе се осврнам на неговиот допринос на полето на геодезијата, бидејќи освен што бил врвен математичар, тој дал голем допринос во науката и како геодег. Во истата ќе биде опфатен делот за карто-графската проекција која се користи во нашата држава, а еден од творците на оваа Гаус-Кригеровата проекција е токму Гаус Ова е еден доказ дека геодезијата нуди одлични можности за практична примена на математиката.

Како математичарите и геодегтите имаат свој Светски ден. Тоа е 21.Март, кој секоја година се одбележува, обично во рамки на пролетното Генерално собрание на Советот на европските геодегти (CLGE - The Council of European Geodetic Surveyors) Бидејќи оваа дата годинава беше во недела, а Генералното Собрание е презакажано за месец јуни, свеченоста по повод Светскиот ден на геодегтите се одржа на 23.03.2021 година, а на истата онлајн присуствува геодегти од сите шест континенти, при што за **Геодег за 2021 година** е избран Карл Фридрих Гаус, кој дал огромен придонес во развојот на геодезијата.

(Johann) Carl Friedrich Gauss
The Global Surveyor of the Year 2021

- 30. April 1777 in Braunschweig
- Gifted child of working-class parents
- Pioneering work in four fields of science and knowledge:
 - mathematics,
 - astronomy,
 - physics and
 - land surveying

† 23. Februar 1855 in Göttingen



DIVW



Геодезијата е една од најстарите науки и како научна дисциплина се занимава со премер на површината на Земјата, на сите објекти над и под земјината површина и нивно претставување на катастарските планови и карти и внесување во катастарот, при што е неопходно да ја задржат својата форма и меѓусебна положба.

Површината на Земјата како небесно тело кое има сфероидна форма, е заменета со геоид кој најмногу може да ја апроксимира Земјата, но поради неправилниот облик и постојаното менување на својата сложена (брановидна) површина ги отежнува геодетските пресметувања. Затоа геоидот се заменува со ротациски елипсоид (кој се добива со ротација околу помалата оската на елипсата) како правилно геометриско тело на кое полесно можат да се вршат сите геодетски пресметувања. Пресликувањето на точките од физичката површина на Земјата во рамнина предвидува две фази и тоа првата е проектирање на овие точки преку нивните вертикали (нормали) на избраниот референтен елипсоид, а во втората фаза се врши пресликување на точките од ротацискиот елипсоид во рамнина според строго утврдени математички правила кои ги дефинираат картографските проекции. Според тоа, картографските проекции претставуваат математички определени постапки за пресликување на елипсоидот во рамнина при што се дефинира односот меѓу географските координати на една точка на елипсоидот и соодветните правоаголни координати за истата точка на рамнината. Една од таквите картографски проекции е и Гаус-Кригеровата проекција.

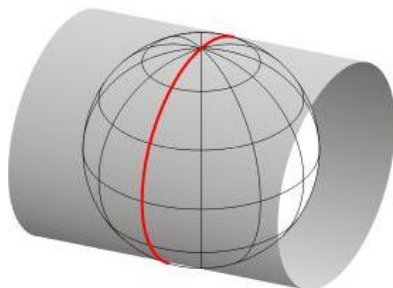
Основите на Гаус-Кригеровата проекцијата која е предмет на оваа статија ги дал токму Гаус во 1825 година, кога за пресметувањата за Хановерската триангулација го објавил своето познато дело „Општи истражувања на закривени површини“ („*Disquisitiones generales circa superficies curvas*“). Тука е дадено општото решение за пресликувањето на точки и линии од една на друга крива површина, при што се зачувува сличноста на бескрајно малите фигури. Според тоа пресликувањето на ротацискиот елипсоид во рамнина претставува само специјален случај од општата теорија на Гаус. Потоа следува цела плејада од истакнати геодети и картографи кои даваат значаен придонес во дефинирањето и практичната примена на проекцијата чии основи ги поставил Гаус од кои посебно е значајно делото на д-р Кригер со наслов „Конформно пресликување на ротацискиот елипсоид во рамнина“ објавено во 1912 година, според кое Гаусовиот начин на пресликување на Земјиниот елипсоид во рамнина е наречен Гаус-Кригеровата проекција на меридијански зони. Значаен придонес во примената на Гаус-Кригеровата проекција дал и германскиот геодет Баумгартен со своите препораки за поделбата на целата Земја на меридијански зони од по 3° географска должина, а истите се прифатени од сите земји кои ја применуваат Гаус-Кригеровата

проекција. Оваа проекција со сите добри особини што ги поседува, денес има најширока примена и поради тоа многу држави ја усвоиле за своја државна картографска проекција.

Гаус не можел да претпостави какво универзално значење ќе има неговиот начин на пресликување на Земјиниот елипсоид на рамнина. Тој не успеал да даде посебни објаснувања за изведувањето на тие формули, па сепак неговото дело добило широка примена во геодетската практика.

Кои се основните карактеристики на Гаус-Кригеровата проекција ?

Во Гаус-Кригеровата проекција која е комформна-попречна, како цилиндрична проекција, елипсоидот се пресликува на елиптички цилиндри, при што секој цилиндар го допира елипсоидот во средниот меридијан на соодветната зона:



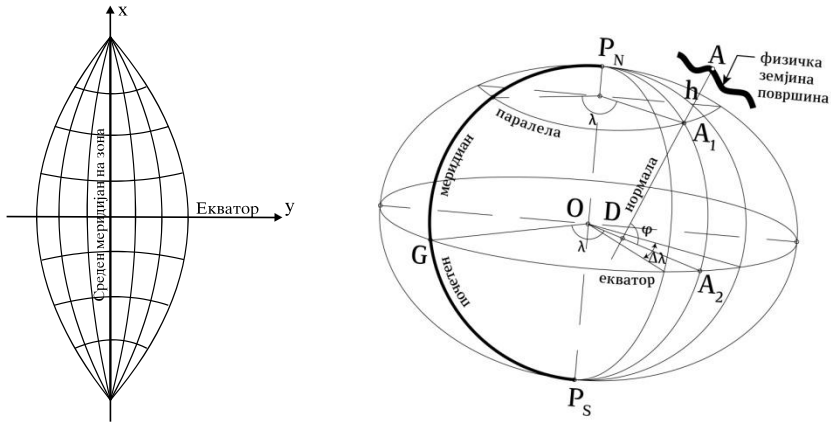
Според теоријата на проекцијата, самото пресликување се врши под следните услови:

1. Проекцијата да биде комформна;
2. Средниот меридијан да се прслика како права линија и неговата проекција да биде X-оска на правоаголниот координатен систем;
3. Секој дел од X-оската да биде еднаков или да има константен сооднос со соодветниот дел од лакот на средниот меридијан.

Ширината на секоја зона во Гаус-Кригеровата проекција изнесува 3° при што одделните зони опфаќаат подрачје од по $1,5^\circ$ западно и источно од средниот меридијан λ_0 .

Согласно напред кажаното, во рамките на секоја зона, само екваторот и средниот меридијан се пресликуваат во рамнина како прави линии, односно проекцијата на средниот меридијан ја дефинира X-оската, а проекцијата на екваторот Y-оската на правоаголниот координатен систем, додека останатите меридијани

и паралели се пресликуваат во вид на криви линии, симетрични во однос на екваторот и средниот меридијан. Може да се забележи дека координатните оски во геодезијата се сменети во однос на координатните оски кои се користат во математиката.



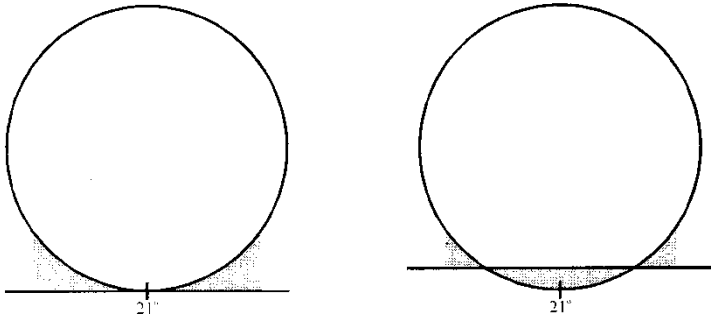
Со примена на тангентниот цилиндар, при пресликувањето на елипсоидот, средниот меридијан во секоја зона се пресликува во рамнина како права линија без линеарни деформации, односно со линеарен размер еднаков на единица. Со оддалечување од средниот меридијан, линеарните деформации при пресликувањето забрзано растат. За Гаус-Кригеровата проекција е усвоено точноста да изнесува 1:10000, односно се дозволува деформација од 1 dm на секоја должина од 1 km. Ширината на подрачјето на пресликување во еден координатен систем се определува според изразот:

$$l = \frac{\rho \sqrt{2d_l}}{\cos \varphi \sqrt{1 + \eta^2}}$$

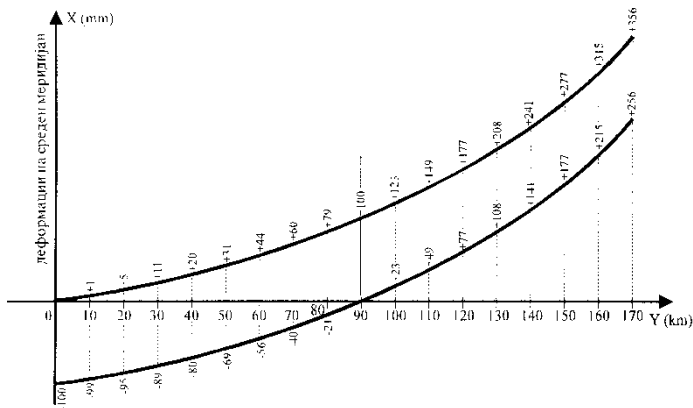
l - географска должина во однос на средниот меридијан
 d_l - дозволена максимална линеарна деформација.

Со ова се определува подрачјето на пресликување во кое дозволена деформација ќе изнесува $d_i=0,0001$, што не е доволно да се опфати зоната од $1,5^\circ$ источно и западно од средниот меридијан. Затоа е воведена и негативна деформација, односно

на средниот меридијан таа да биде $-0,0001$, со што подрачјето на пресметување се зголемува. Воведувањето на негативната линерна деформација на средниот меридијан значи дека се воведува секантен цилиндар.



Може да се види дека со ова се зголемува подрачјето на преликување на иста проекциска рамнина. Ако се направи дијаграм на линеарните деформации за двата случајеви (допирен и секантен цилиндар), може да се види дека во првиот случај граничниот износ на линеарната деформација, ќе настапи на 90 км од средниот меридијан, додека во вториот ќе настапи на 127 км оддалеченост од средниот меридијан, односно во тој случај зоната на прсликување се зголемува за 74 км.



Во ваквиот случај со усвојување на деформации со негативен предзнак, должината на лакот на средниот меридијан во проекцијата ќе биде пократка за 1 dm на секоја должина од 1 km.

Со ова се дефинира т.н. модул на деформации кој гласи:

$$m_0 = 1 - 0.0001 = 0.9999$$

Со множење на директно пресметаните координати (\bar{Y} , \bar{X}) со тој модул се добиваат т.н. модулирани координати, односно смалените кординати, т.е.:

$$Y = m_0 \bar{Y} = (1 - 0.0001) \bar{Y} = 0.9999 \bar{Y}$$

$$X = m_0 \bar{X} = (1 - 0.0001) \bar{X} = 0.9999 \bar{X}$$

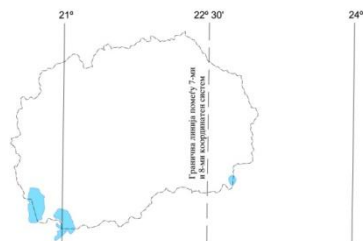
Примена на Гаус-Кригеровата проекција

Исклучително добрите својства на Гаус-Кригеровата проекција и можноста за нејзина универзална примена допринесуваат оваа проекција да биде прифатена од голем број земји. Истата, прва ја усвоила Австрија во 1917 г., а потоа и Германија во 1923 година. Во 1924 година, Комисијата составена од членови на Воено географскиот институт (ВГИ) и Генералната дирекција за катастар на тогашна Југославија, во чии рамки се наоѓала и Македонија, донела одлука за прифаќање на Гаус-Кригеровата проекција, при што се донесени следните заклучоци:

- Да бидат користени елементите на Земјиниот елипсоид според Бесел 1841,
- Географските должини да се пресметуваат од Гринич,
- Ширината на зоните на пресликувањето да биде по 3° географска должина, при што средните меридијани на зоните за Југославија да бидат со источна географска должина од 15°, 18° и 21°, односно да се усвојат 5, 6 и 7 за броеви на наведените зони (координатни системи),
- Да се воведат Баумгартеновиот начин на изразување на правоаголните координати во рамнина.

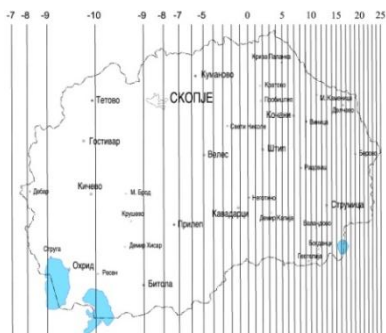
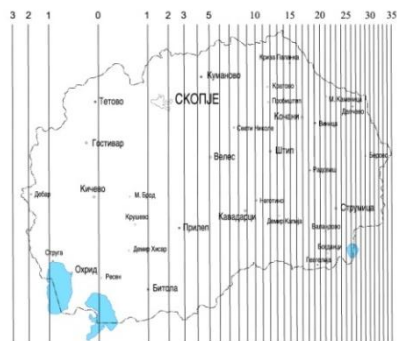
Според донесените заклучоци, сите апциси X северно од екваторот се позитивни, додека пред ордината Y со број се

означува координатниот систем, а за да се избегнат негативните ординати точките на средниот меридијан во секоја зона треба да имаат вредност $Y=500000$ м.



Со наведената поделба, целокупната територија на Македонија спаѓа во седмата зона чиј среден меридијан е $\lambda = 21^\circ$. Ако применената на Гаус-Кригеровата проекција во рамките на поранешна Југославија се сметаше како исклучително добро решение, набљудувајќи ја сега нашата државна територија како самостојна целина произлегува друг заклучок. Имено, нашата земја, според својата географска

положба припаѓа во два координатни системи 7-ми и 8-ми. Прифаќајќи целата територија да биде во еден координатен систем (седмиот), чија X-оска е 21. меридијан, во источниот дел од нашата територија се јавуваат линерани деформации кои се значително поголеми од дозволената (усвоената) вредност ± 10 cm/km. Од сликите дадени подолу, од кои едната е за тангентен, а другата за секантен цилиндар, може да се види дека во источниот дел од нашата држава линераните отстапувања ги надминуваат дозволените.



Во Република Северна Македонија веќе се размислува за избор на нова државна картографска проекција, најсоодветна за територијата на Република Северна Македонија, пред се заради неприлагоденоста на Гаус-Кригеровата проекција во однос на

географската положба на нашата земја. Сепак, при овие размислувања треба да се има предвид дека речиси целокупната досегашна картографска, катастарска и останата документација е во постојната Гаус-Кригеровата проекција и какви последици би биле предизвикани со евентуален избор на нова картографска проекција.

Извори:

- [1] Србиновски З. (2019): **Студија за избор на нова државна картографска проекција.**
- [2] <https://sr.wikipedia.org/wiki/геодезија>